

UNIVERSIDADE FEDERAL DA INTEGRAÇÃO LATINO-AMERICANA
(UNILA)
Curso de Engenharia Civil

MANUAL DO USUÁRIO

Software de Análise Momento–Curvatura
em Seções de Concreto Armado

Versão: 1.0



Desenvolvimento:

Eliseu Santana Junior

Autores:

Felipe Manoel Wandscheer
André Jacomel Torii
Eliseu Santana Junior

Professor Orientador:

André Jacomel Torii

Plataforma:

www.concretoarmado.com

Foz do Iguaçu – PR
2026

Sumário

1	Introdução	2
1.1	Público-alvo	2
1.2	O que o software faz	2
2	Fundamentos teóricos resumidos	3
2.1	Hipóteses usuais	3
2.2	Cinemática e curvatura	3
2.3	Equilíbrio e obtenção do diagrama $M-\phi$	4
2.4	Modelos constitutivos	4
3	Visão geral da interface e fluxo de trabalho	7
3.1	Passos típicos	7
3.2	Tela principal	7
4	Entradas obrigatórias e explicações detalhadas	8
4.1	Geometria da seção (vértices)	8
4.2	Parâmetros geométricos e de material	8
4.3	Armaduras (barras)	9
4.4	Parâmetros numéricos do Algoritmo	9
4.5	Unidades e coerência	10
5	Saídas e interpretação de resultados	11
5.1	Gráfico Momento \times Curvatura	11
5.2	Tabelas de resultados	11
6	Exemplo completo de uso	11
6.1	Execução	11
6.2	Dados de entrada (exemplo)	12
6.3	Validação rápida	15
7	Boas práticas, erros comuns e solução de problemas	15
7.1	Boas práticas	15
7.2	Erros comuns	15
8	Apêndices	15
8.1	Convenções de eixos e sinais	15
8.2	Bibliografia e referências	15

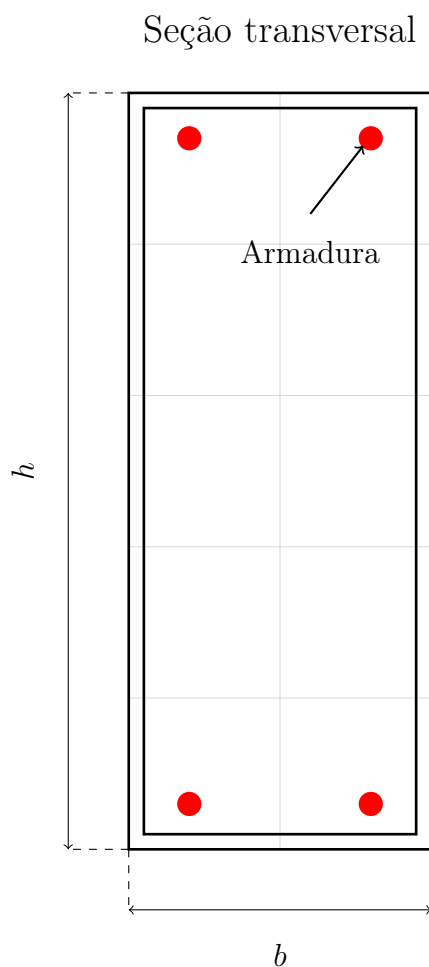
1 Introdução

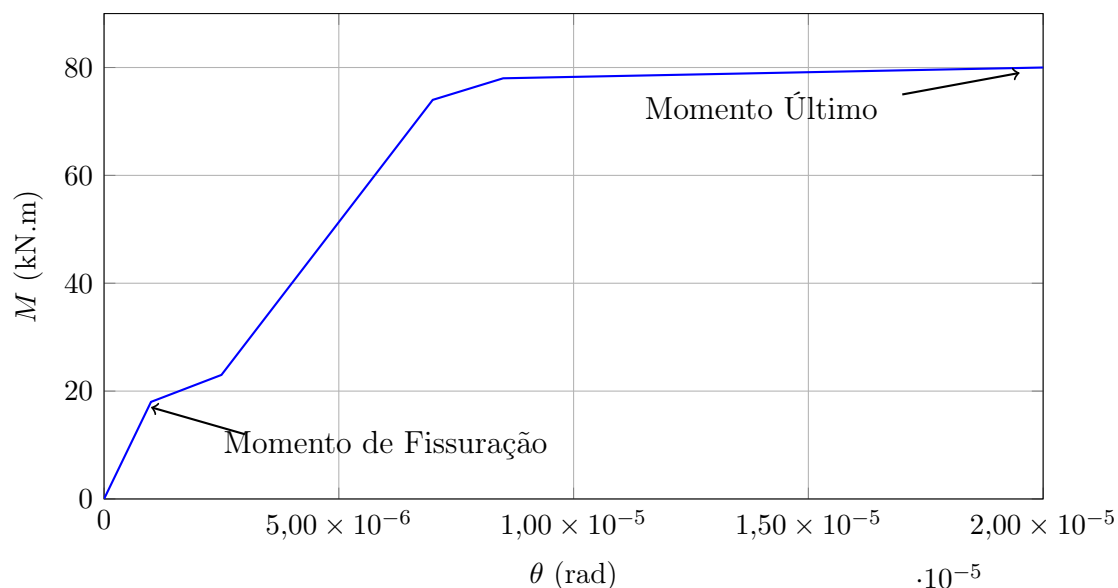
A avaliação da relação momento–curvatura de seções transversais de concreto armado é um problema de grande importância na engenharia estrutural, com ampla aplicação tanto para fins científicos quanto de projeto. Por essa razão, tem sido objeto de intensa investigação ao longo das últimas décadas. Aqui apresentamos um conjunto de rotinas computacionais simples, gerais e flexíveis para o problema em questão. As rotinas foram desenvolvidas na linguagem de programação PYTHON e destinam-se principalmente ao ensino de engenharia, fins acadêmicos e prática de projetos.

1.1 Público-alvo

Profissionais, estudantes e pesquisadores em engenharia estrutural com noções básicas de mecânica dos materiais, concreto armado e análise de seções.

1.2 O que o software faz





Calcula o diagrama relação Momento (M) versus curvatura (θ) a partir de:

- **Geometria da seção:** vértices da seção em mm.
- **Materiais:** resistências do concreto (f_c , f_{ct}) e escoamento do aço (f_y).
- **Armaduras:** áreas e coordenadas das barras.
- **Parâmetros numéricos:** discretização e tolerâncias.

2 Fundamentos teóricos resumidos

2.1 Hipóteses usuais

- **Seções planas:** permanecem planas após a deformação (hipótese de Bernoulli).
- **Compatibilidade:** distribuição linear de deformações ao longo da altura.
- **Constitutivas:** leis tensão–deformação para concreto e aço conforme modelos adotados no software.

Informações adicionais

- **Mais detalhes:** Para mais detalhes e informações de parâmetros acessar o artigo: [Clique aqui para acessar o artigo via DOI](#)

2.2 Cinemática e curvatura

A curvatura ϕ de uma seção é definida por:

$$\phi = \frac{d\theta}{ds} \approx \frac{\varepsilon_{\text{topo}} - \varepsilon_{\text{base}}}{h}$$

onde ε são deformações extremas e h é a altura da seção.

2.3 Equilíbrio e obtenção do diagrama $M-\phi$

Para cada nível de curvatura ϕ e rotação θ , resolvem-se:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_z = 0$$

com integrações das tensões no concreto e contribuições das barras de aço, obtendo-se $M(\phi)$. O diagrama pode apresentar ramos pré e pós-pico conforme a não-linearidade dos materiais.

2.4 Modelos constitutivos

- **Concreto:** Utilizou-se o modelo parábola-retângulo, conforme recomendado pela normativa brasileira (NBR 6118, 2023).

No modelo apresentado pela norma brasileira para projetos de concreto armado, baseado no CEB-FIP (1990), para análises no estado-limite último é adotado o diagrama tensão–deformação parábola-retângulo, como o mostrado na Figura 4, descrito pelas seguintes expressões:

$$\begin{cases} \sigma_c = 0.85f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] & \text{para } \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} \\ \sigma_c = 0.85f_{cd} & \text{para } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu} \end{cases}$$

$$\text{Para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa: } \quad n = 2.$$

Para concretos com até 50 MPa de resistência característica:

$$\varepsilon_{c2} = 2.0\text{‰}$$

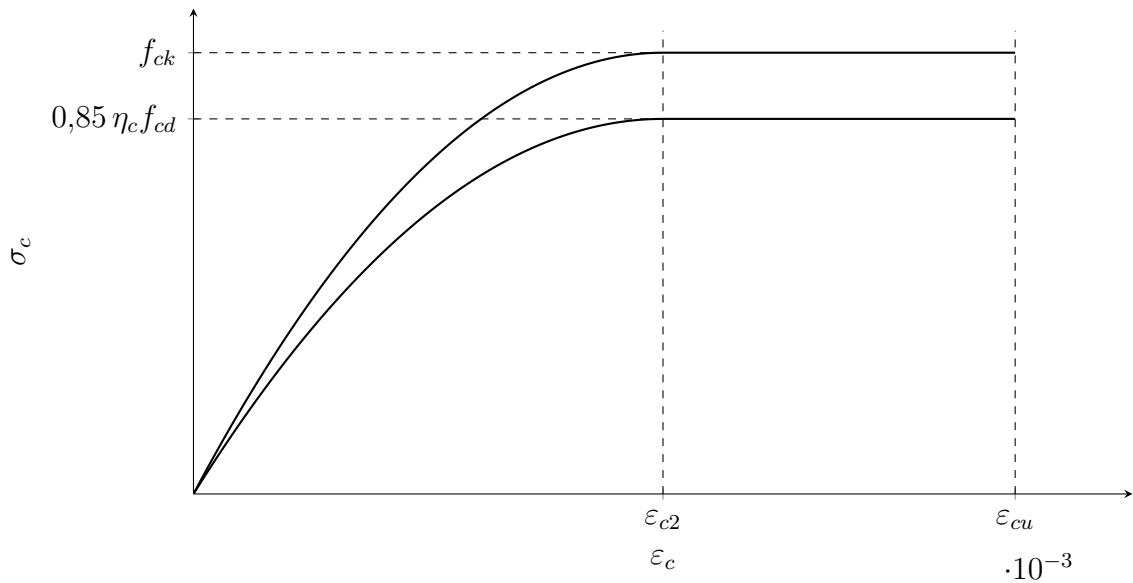
$$\varepsilon_{cu} = 3.5\text{‰}$$

$$n = 2.$$

Assim, por enquanto, o programa considera apenas o caso $f_{ck} \leq 50$ MPa, para o qual o expoente assume o valor fixo $n = 2$. A extensão do modelo para concretos de alta resistência, que utiliza a expressão

$$n = 1.4 + 23.4 \left(\frac{90 - f_{ck}}{100} \right)^4,$$

será incorporada em futuras atualizações.



- **Concreto (tração):** A relação tensão–deformação do concreto à tração uniaxial é ilustrada na Figura.

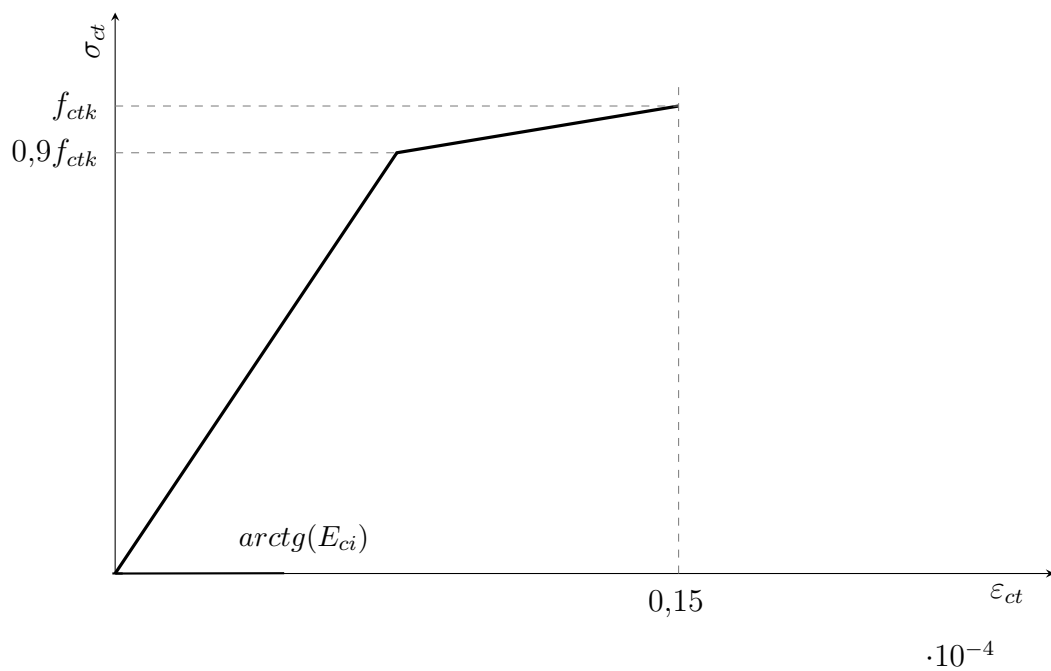


Figura 1: Diagrama tensão-deformação bilinear de tração

De modo geral, a resistência à tração f_{ct} corresponde a aproximadamente 5% a 10% da resistência à compressão. Por esse motivo, costuma-se afirmar que o concreto é um material com baixa resistência à tração.

Na ausência de ensaios físicos, a resistência à tração pode ser estimada pela expressão empírica:

$$f_{ct} = 0,3 f_c^{2/3}, \quad (1.9)$$

onde f_c é dado em MPa. Essa relação é válida para concretos convencionais de classe até C50. Ressalta-se que tal expressão deve ser utilizada apenas como estimativa

da resistência à tração para concretos usuais; para concretos não convencionais ou quando se exige maior precisão, ensaios experimentais são necessários. Além disso, o programa permite que o usuário insira manualmente o valor da resistência à tração f_{ct} , caso deseje utilizar resultados experimentais próprios ou valores específicos diferentes da estimativa normativa

- **Aço:** O modelo mais empregado e empregado pela NBR 6118-2023 para representar a resposta mecânica do aço de armaduras passivas em estruturas de concreto armado convencionais é o modelo bilinear, ilustrado na Figura

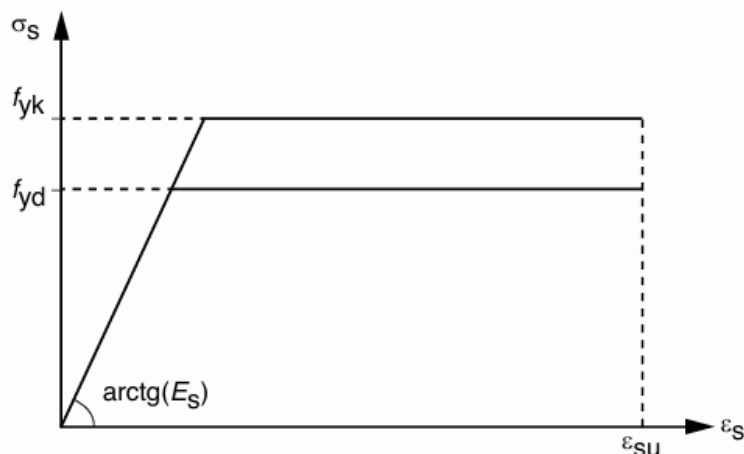


Figura 8.5 – Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas

Figura 2: Diagrama Tensão-deformação (Armaduras Passivas)

Nesse modelo, assume-se comportamento elástico-linear até a tensão de escoamento f_y . Após o escoamento, adota-se um patamar de tensão constante até a deformação última ε_{su} , logo no programa o valor de : ε_{su} e tomao como:

$$\varepsilon_{su} = \frac{10}{100} = 0,10.$$

Esse modelo desconsidera o trecho de encruamento (endurecimento por deformação) observado experimentalmente, conforme mostrado na Figura ???. Embora existam modelos que incorporam esse efeito, eles não serão utilizados aqui.

Um aspecto importante é que o módulo de elasticidade do aço é praticamente o mesmo para diferentes tipos de liga, sendo aproximadamente:

$$E_s \approx 210 \text{ GPa.}$$

Assim, a deformação de escoamento pode ser determinada por:

$$\varepsilon_{sy} = \frac{f_y}{E_s}. \quad (1.10)$$

Os aços mais utilizados no concreto armado brasileiro são os tipos CA50 e CA60, onde *CA* significa *Concreto Armado*, e o número indica a tensão de escoamento em kgf/mm^2 . Como $1 \text{ kgf}/\text{mm}^2 = 10 \text{ MPa}$, tem-se que:

- CA50 $\rightarrow f_y = 500 \text{ MPa}$ - CA60 $\rightarrow f_y = 600 \text{ MPa}$

O modelo é expresso pela seguinte relação:

$$\begin{cases} \sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s & \text{para } |\varepsilon_s| \leq \varepsilon_{yd} \\ \sigma_s = f_{yd} \cdot \text{sgn}(\varepsilon_s) & \text{para } \varepsilon_{yd} < |\varepsilon_s| \leq \varepsilon_{ud} \end{cases} \quad (1)$$

onde:

- $E_s = 210\,000 \text{ MPa}$ (módulo de elasticidade do aço — item 8.3.5);
- $\text{sgn}(\varepsilon_s)$ (vem da palavra inglesa sign, que significa sinal. Ele é uma função matemática usada para indicar se a deformação do aço é positiva (tração) ou negativa (compressão));
- $E_s = 210\,000 \text{ MPa}$ (módulo de elasticidade do aço — item 8.3.5);
- $\varepsilon_{yd} = f_{yd}/E_s$ (deformação específica de escoamento);
- $\varepsilon_{ud} =$ deformação última admissível (geralmente 10‰ ou 0,01, conforme classe de ductilidade do aço).

Esse diagrama permite ao software capturar com precisão o comportamento linear elástico até o escoamento e o platô plástico posterior, essencial para a análise não-linear de seções submetidas a flexão composta.

3 Visão geral da interface e fluxo de trabalho

3.1 Passos típicos

1. **Definir geometria da seção** (vértices X, Y em mm).
2. **Informar propriedades dos materiais:** f_c (MPa), f_{ct} (MPa), f_y (MPa).
3. **Inserir armaduras:** áreas A_s (mm^2) e coordenadas X, Y (mm).
4. **Configurar parâmetros numéricos:** discretização e tolerâncias.
5. **Executar cálculo** do diagrama $M-\phi$.
6. **Analisar resultados:** gráficos, tabelas e verificações.

3.2 Tela principal

Os valores apresentados na imagem abaixo já vêm pre-definidos no programa, funcionando como uma seção genérica destinada a auxiliar o usuário na compreensão inicial dos parâmetros. Esses valores padrão foram escolhidos para fornecer uma referência intuitiva e facilitar o entendimento do comportamento estrutural antes da inserção dos dados reais do projeto.

Caso o usuário deseje, todos os parâmetros podem ser ajustados manualmente, permitindo total flexibilidade para representar diferentes geometrias, materiais e condições específicas de análise.

Dados

Dados da seção

b (mm):

h (mm):

fc (MPa):

fct (MPa):

fy (MPa):

Armaduras

Número de barras:

As (mm ²)	X (mm)	Y (mm)
123	30	30
123	170	30

▶ Parâmetros do algoritmo
▶ Vértices da Seção

Figura 3: Tela “Dados da seção”: parâmetros geométricos e de materiais.

4 Entradas obrigatórias e explicações detalhadas

4.1 Geometria da seção (vértices)

Tabela 1: Tabela de vértices da seção retangular (exemplo).

b (mm)	h (mm)
200	500

Interpretação: vértices em ordem (sentido horário ou anti-horário) definem o polígono da seção. Para o retângulo: largura $b = 200$ mm, altura $h = 500$ mm.

4.2 Parâmetros geométricos e de material

- **Largura b (mm):** dimensão horizontal da seção.
- **Altura h (mm):** dimensão vertical da seção.

- **Resistência à compressão do concreto** f_c (MPa): parâmetro do modelo de compressão.
- **Resistência à tração do concreto** f_{ct} (MPa): define o início de fissuração/tração efetiva.
- **Tensão de escoamento do aço** f_y (MPa): controla o regime plástico das barras.

4.3 Armaduras (barras)

Tabela 2: Armaduras: áreas e posições (exemplo).

A_s (mm ²)	X (mm)	Y (mm)
123	30	30
123	170	30

Interpretação: cada linha representa uma barra com *área equivalente* A_s e coordenadas do centro. O sistema de referência X, Y deve ser consistente com os vértices da seção.

4.4 Parâmetros numéricos do Algoritmo

A seguir, apresenta-se a imagem contendo os parâmetros numéricos que podem ser ajustados pelo usuário no programa. Essa visualização inicial facilita a identificação dos campos editáveis e oferece uma referência clara dos valores que podem ser modificados conforme as necessidades da análise.

▼ **Parâmetros do algoritmo**

nx:	<input type="text" value="1"/>
ny:	<input type="text" value="50"/>
tol:	<input type="text" value="0,1"/>
thetai:	<input type="text" value="0,0"/>
thetaf:	<input type="text" value="3e-05"/>
m:	<input type="text" value="100"/>

Figura 4: Tela “Imagem dos campos para edição referente aos parâmetros numéricos”

A seguir, apresenta-se a imagem que ilustra os parâmetros n_x ; n_y : disponíveis para configuração no programa, servindo como referência visual antes da descrição detalhada de seus significados.

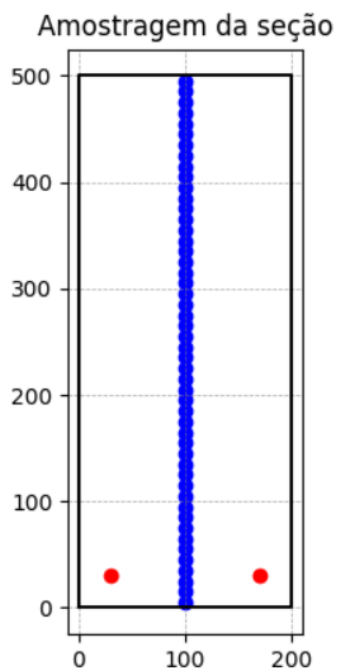


Figura 5: Tela “Imagem da divisões ou pontos da malha/discretização na seção.”

- n_x : número de divisões ou pontos na direção X da malha/discretização da seção.
- n_y : número de divisões na direção Y . Valores maiores capturam melhor gradientes de tensão.
- **Tolerância (tol)**: critério de convergência do solver (por exemplo, $\leq 0,1$ para resíduos adimensionais).
- θ_i e θ_f : intervalo de rotação (em rad) associado ao *varrimento* de estados. θ_f pode ser pequeno (ex.: 3×10^{-5}).
- m : número de passos/iterações no varrimento de curvatura-rotação.

4.5 Unidades e coerência

- **Comprimentos**: mm em toda a geometria e posições das barras.
- **Tensões**: MPa para f_c , f_{ct} e f_y .
- **Áreas**: mm^2 para A_s .
- **Ângulos e curvatura**: θ em rad; ϕ em rad/mm (se aplicável).

5 Saídas e interpretação de resultados

5.1 Gráfico Momento \times Curvatura

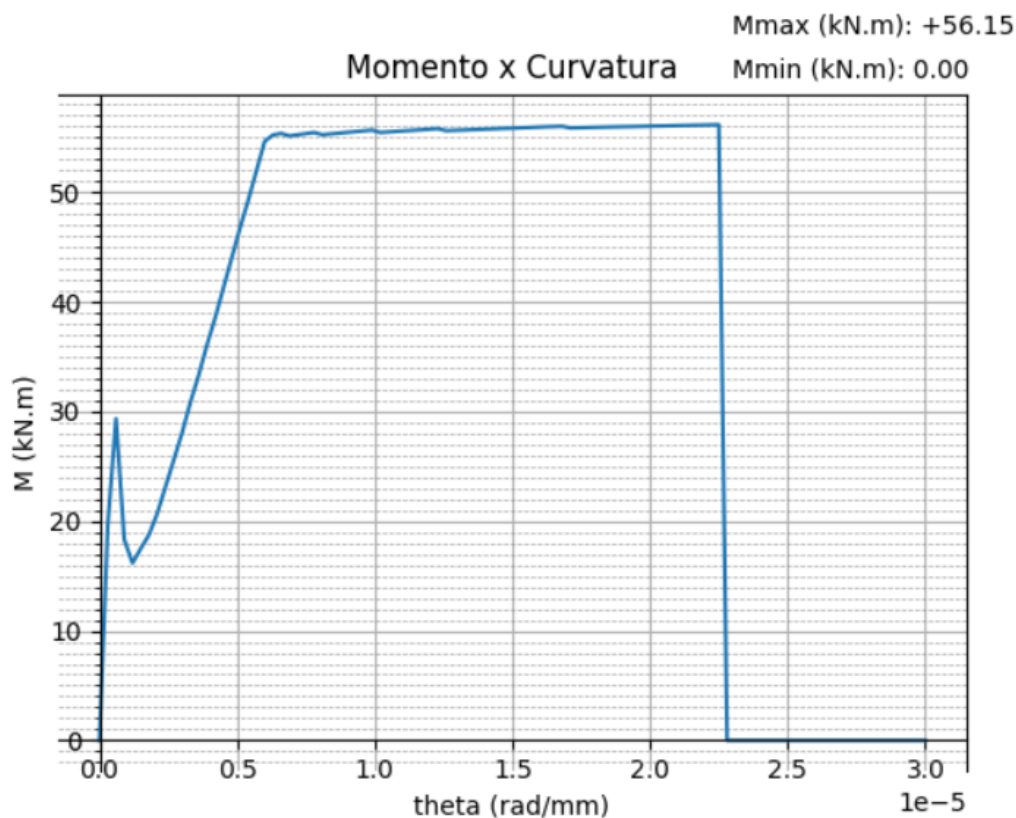


Figura 6: Diagrama $M-\theta$ gerado pelo software (exemplo).

Leitura: identifique trechos elásticos, início de fissuração, escoamento do aço, pico resistente e resposta pós-pico (se modelada). O momento resistente M_{\max} e a curvatura correspondente são úteis para verificações de ductilidade.

5.2 Tabelas de resultados

- **Pontos de cálculo:** θ_i , M_i , κ_i e estados de material (fissurado/fluência).
- **Integrais de seção:** forças normais e momentos por faixa de discretização.
- **Estados limite:** indicação dos estados limite atingidos ao longo do diagrama, se implementado.

6 Exemplo completo de uso

6.1 Execução

1. **Preencha** a geometria na aba “Vértices”.

2. **Informe** b, h e os materiais na aba “Dados”.
3. **Cadastre** barras na aba “Armaduras”.
4. **Ajuste** $n_x, n_y, tol, \theta_i, \theta_f, m$ na aba “Parâmetros”.
5. **Calcule** e **exporte** gráficos e tabelas.

6.2 Dados de entrada (exemplo)

- **Seção retangular:**

$$b = 250 \text{ mm}, \quad h = 500 \text{ mm}$$

- **Materiais:**

$$f_c = 30,0 \text{ MPa}, \quad f_{ct} = 2,9 \text{ MPa}, \quad f_y = 500,0 \text{ MPa}$$

Dados da seção

b (mm):

h (mm):

fc (MPa):

fct (MPa):

fy (MPa):

Figura 7

- **Armaduras:** quatro barras com:

$$A_s = 123 \text{ mm}^2, \quad (X, Y) = (30, 30) \text{ mm}; (220, 30) \text{ mm}; (30, 470) \text{ mm}; (220, 470) \text{ mm}$$

Armaduras		
Número de barras:		
4		
As (mm2)	X (mm)	Y (mm)
123	30	30
123	220	30
123	30	470
123	220	470

Figura 8

– Parâmetros numéricos:

$$n_x = 5, \quad n_y = 30, \quad \text{tol} = 0,1, \quad \theta_i = 0,0, \quad \theta_f = 3 \times 10^{-5}, \quad m = 100$$

▼ **Parâmetros do algoritmo**

nx:	<input type="text" value="5"/>
ny:	<input type="text" value="30"/>
tol:	<input type="text" value="0,1"/>
thetai:	<input type="text" value="0,0"/>
thetaf:	<input type="text" value="3e-05"/>
m:	<input type="text" value="100"/>

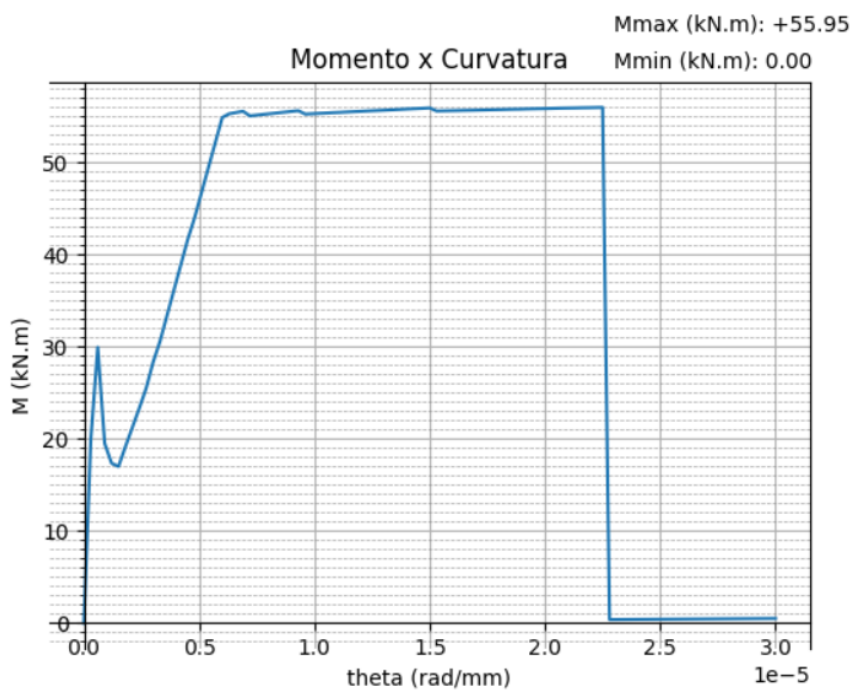
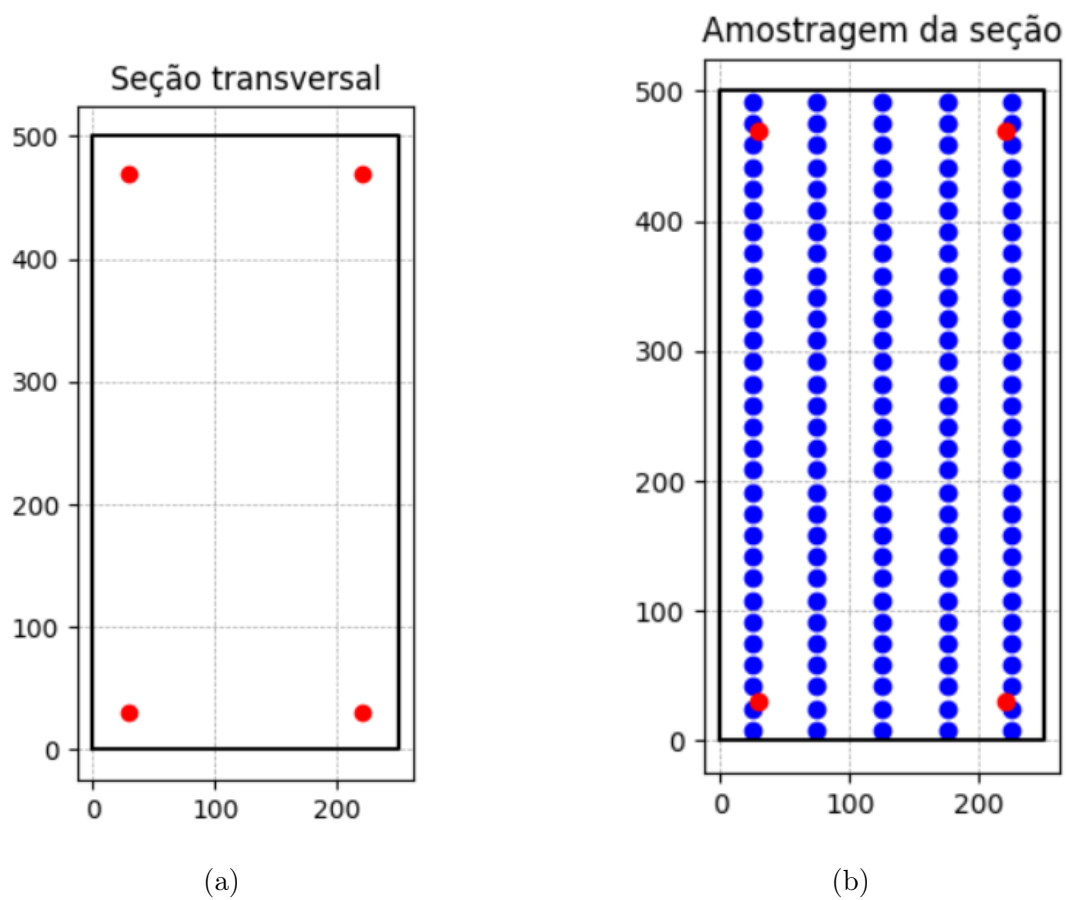
Figura 9

– Analise:

ANALISAR!!!

Figura 10

– Resultados:



(c)

Figura 11

6.3 Validação rápida

- **Consistência:** verifique se $\sum F$ e $\sum M$ fecham numericamente em cada passo.
- **Sensibilidade:** aumente n_y e reduza tol para testar estabilidade do resultado.
- **Armaduras:** confirme posições dentro da seção e valores de A_s coerentes com diâmetros reais.

7 Boas práticas, erros comuns e solução de problemas

7.1 Boas práticas

- **Unidades:** mantenha mm e MPa consistentemente.
- **Malha:** use $n_y \geq 50$ para seções altas e gradientes acentuados.
- **Gravação:** salve versões de entrada e saída para rastreabilidade.

7.2 Erros comuns

- **Vértices fora de ordem:** causam seção autointersectante.
- **Barras fora da seção:** coordenadas X, Y fora dos limites de b, h .
- **Tolerância muito grande:** não-convergência ou resultados ruidosos.
- **Intervalo de captura:** o intervalo de curvatura não captura o comportamento total da seção.

8 Apêndices

8.1 Convenções de eixos e sinais

- **Origem:** canto inferior esquerdo da seção em $(0, 0)$.
- **Eixo X:** horizontal, positivo à direita.
- **Eixo Y:** vertical, positivo para cima.
- **Sinal de M :** defina aqui a convenção de momento fletor usado no software.

8.2 Bibliografia e referências

- **Artigo:** G. F. Melo, A. J. Torii, E. M. Medeiros, and A. K. L. Kzam, “MATLAB computational routines for moment-curvature relation of reinforced concrete cross sections,” *Rev. IBRACON Estrut. Mater.*, vol. 14, no. 2, e14202, 2021, <https://doi.org/10.1590/S1983-41952021000200002>.
- **Norma:** ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto — Procedimento. Rio de Janeiro, 2023.